

CALCUL DES COQUES MULTICOUCHES DE RÉVOLUTION PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

par Daniel ENGRAND

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA)
92320 Châtillon (France)

Résumé

Les plaques et coques multicouches nécessitent un traitement spécial en analyse des structures lorsque l'effet de cisaillement transverse est important, en particulier dans les cas de flexions statiques importantes, de vibrations à hautes fréquences et de réponses à des chocs.

Pour prendre en compte cet effet, on développe une méthode par éléments finis utilisant une théorie de coques, ce qui permet d'éviter une représentation tridimensionnelle coûteuse. Dans chaque couche, les rotations des normales sont considérées comme des degrés de liberté indépendants. De cette façon, un segment de droite normal à la coque non déformée devient, après déformation, une ligne brisée. La continuité des déplacements est assurée de façon parfaite aux interfaces.

On montre que, même pour des coques en matériaux homogènes et isotropes, la méthode est très utile dans le cas de chargements thermiques présentant de forts gradients dans l'épaisseur de la coque.

Quelques exemples de calcul sont présentés : coques multicouches anisotropes en chargement statique. Coque homogène en chargement thermique. Modes propres d'un cylindre multicouche. Modes propres d'un réservoir multicouche rempli de liquide.

CALCULATION OF AXISYMMETRICAL MULTILAYER SHELLS BY THE FINITE ELEMENT METHOD

Multilayered shells and plates need a special treatment in structural analysis, in case of an important transverse shear strain effect, and particularly for strong static bending, high frequency vibrations, and shock responses.

A finite element method is developed using a shell theory and avoiding expensive three-dimensional representations. In each layer, the rotations of normals are considered as independent degrees of freedom, so that a normal to the undeformed shell is transformed, after deformation, into a broken line. The perfect continuity of the displacements is insured at each interface between two layers.

It is shown that, even for homogeneous isotropic materials, this method is quite useful in the case of thermal loading when very high temperature variations occur in the thickness of the shell.

Some numerical examples are presented :
Multilayered anisotropic shell with static pressure loading - Homogeneous shell with thermal loading - Natural vibration modes of a multilayered cylinder - Natural vibration modes of a multilayered tank filled with a liquid.

I - Introduction

Les théories de coques couramment utilisées pour la résolution des problèmes structuraux font appel la plupart du temps aux hypothèses bien connues de Kirchhoff-Love :

- Les points initialement situés sur la normale géométrique à la surface moyenne de la coque restent situés, après déformation, sur la normale à la surface déformée.
- Les déformations sont nulles dans la direction normale.

Ces hypothèses conduisent à de très bons résultats sauf dans certains cas et particulièrement dans les cas suivants où l'hypothèse a) se trouve en défaut :

- Lorsque la coque n'est pas vraiment mince, c'est-à-dire lorsque le rapport h/R (épaisseur sur le plus petit rayon de courbure) n'est pas petit devant l'unité, ou encore, même lorsque la coque peut être considérée comme mince, si le phénomène étudié (propagation d'ondes par exemple) a une longueur d'onde caractéristique L telle que le rapport h/L (épaisseur/longueur d'onde) n'est pas petit devant l'unité.

- Lorsque la coque n'est pas homogène en épaisseur (coques sandwich), ou lorsqu'elle possède un fort degré d'anisotropie (modules de cisaillement transverses faibles par rapport aux modules de traction par exemple), ou encore lorsqu'elle est artificiellement stratifiée par un fort gradient de température par exemple.

La méthode exposée ici a été développée précisément pour traiter ces différents cas : coques sandwich et multicouches peuvent être considérées comme relativement épaisses, et souvent fortement anisotropes. Réponses transitoires de ces coques à un chargement impulsif très court. Contraintes thermiques pour un champ de température variant

fortement dans l'épaisseur. Dans ce but, on ne conserve pas l'hypothèse a), et on suppose alors que la normale matérielle ne se transforme plus au cours de la déformation en la normale géométrique de la surface déformée. Pour une coque composée d'un empilement de plusieurs couches de matériaux différents, on est même amené à représenter la déformée de la normale matérielle par une ligne brisée ayant ses points anguleux aux interfaces entre les couches (figure 1). C'est sur cette représentation qu'est fondée la méthode exposée ici.

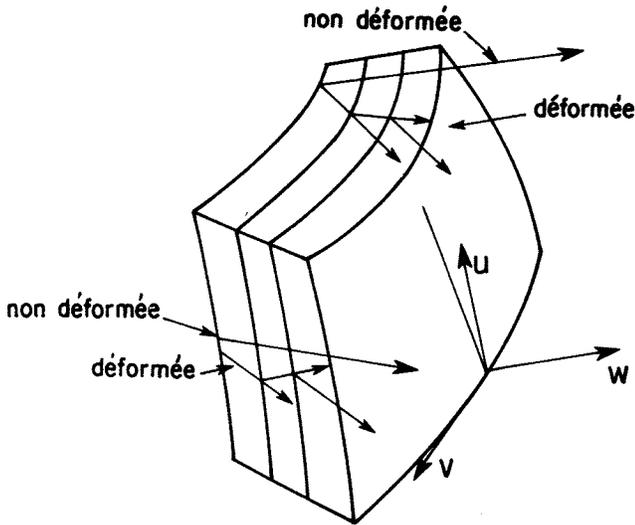


Fig. 1 - Déformation des normales.

On conserve cependant l'hypothèse b), ce qui permet de rester dans le cadre théorique des théories de coques sans introduire de trop grandes complications. D'autre part, il n'est pas nécessaire de développer une théorie générale des coques multicouches. L'approche par la méthode des éléments finis permet en effet, en utilisant pour chaque couche une théorie bien adaptée (1) d'en représenter correctement le comportement, et "d'assembler" ces couches les unes sur les autres en imposant la continuité des déplacements aux interfaces. Dans la première partie de cet exposé, on décrit rapidement la méthode de calcul, et dans la deuxième, on présente quelques applications parmi les plus significatives : cylindres en chargement statique, modes propres de cylindres composites comportant des cadres. Modes propres d'une structure de réservoir en matériau multicouche, contenant un liquide. Chargement thermique à fort gradient sur une structure homogène en forme d'ogive.

II - Formulation du problème

La méthode repose sur la théorie de coques de Naghdi (1) qui est utilisée pour représenter séparément chacune des couches.

II.1 - Déformations - Contraintes

Pour une coque de révolution, les déplacements sont choisis, dans le repère local (α, θ, ζ) (figure 2) sous la forme suivante :

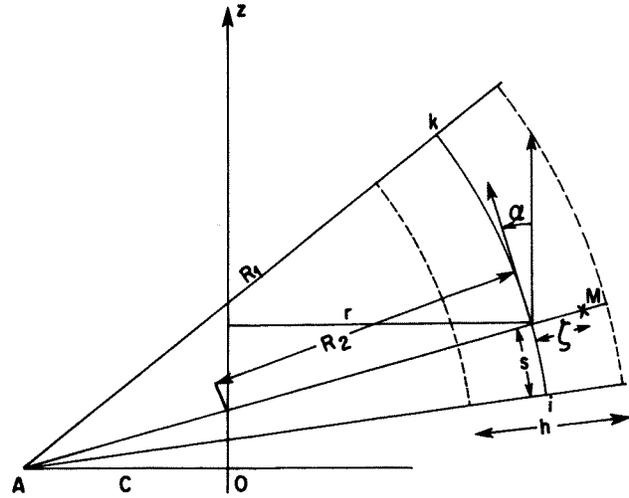


Fig. 2 - Géométrie.

$$\begin{aligned} U(M) &= u(\alpha, \theta) + \zeta \varphi(\alpha, \theta) \\ V(M) &= v(\alpha, \theta) + \zeta \psi(\alpha, \theta) \\ W(M) &= w(\alpha, \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

et l'expression des déformations (non symétriques) est celle donnée par Naghdi

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_1} && \left. \begin{array}{l} \text{allongements} \\ \text{tangentiels} \end{array} \right\} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \frac{\partial r}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_2} && \left. \begin{array}{l} \text{variations de} \\ \text{courbure} \end{array} \right\} \\ \kappa_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} && \\ \kappa_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\varphi}{r} \frac{\partial r}{\partial \alpha} && \\ \gamma_{1\zeta} &= \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_1} + \varphi && \left. \begin{array}{l} \text{glissements} \\ \text{transverses} \end{array} \right\} \\ \gamma_{2\zeta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{R_2} + \psi && \\ \gamma_1 &= \frac{\partial v}{\partial \alpha} && \left. \begin{array}{l} \text{glissements} \\ \text{tangentiels} \end{array} \right\} \\ \gamma_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \frac{\partial r}{\partial \alpha} && \\ \delta_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} && \\ \delta_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\varphi}{r} \frac{\partial r}{\partial \alpha} && \left. \begin{array}{l} \text{torsions} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

A la colonne \mathcal{E} des déformations ainsi définie, on associe la colonne Σ des contraintes généralisées correspondantes dont la transposée s'écrit :

$$\Sigma^T = \{N_1, N_2, M_1, M_2, V_1, V_2, N_{12}, N_{21}, M_{12}, M_{21}\} \quad (3)$$

On reconnaît, dans l'ordre, les tractions tangentielles, les moments fléchissants, les efforts tranchants, les contraintes généralisées de cisaillement dans le plan tangent, et les moments de torsion.

II.2 - Comportement

Pour chaque couche, le matériau est supposé élastique, homogène, et orthotrope, ayant ses directions d'orthotropie parallèles aux lignes de coordonnées. La loi de comportement pour une couche s'écrit alors :

$$\Sigma(\lambda, \theta) = H(\lambda) \mathcal{E}(\lambda, \theta) \quad (4)$$

La matrice H étant donnée par :

$$H = \begin{array}{c|cccccccc} C_1, C_{11}, D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & D_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_1, D_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \text{SYM.} & F_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & J_1 & J_2 & \Gamma_1 & 0 & & \\ & & & & J_2 & \Gamma_2 & & \\ & & & & & & J_1 & 0 \\ & & & & & & & J_2 \end{array} \quad (5)$$

Les divers coefficients intervenant dans H sont explicités en annexe.

III - Formulation générale d'un élément fini pour une couche

Suivant le schéma classique, les déplacements, rotations, déformations, contraintes, efforts, sont développés en série de Fourier de l'angle polaire θ .

III.1 - Décompositions en séries de Fourier

Si on note $d(\lambda, \theta)$ la colonne des déplacements et rotations :

$$d(\lambda, \theta) = \begin{bmatrix} u(\lambda, \theta) \\ v(\lambda, \theta) \\ w(\lambda, \theta) \\ \varphi(\lambda, \theta) \\ \psi(\lambda, \theta) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Le développement de $d(\lambda, \theta)$ en série de Fourier s'écrit :

$$d(\lambda, \theta) = d^0(\lambda) + \sum_k \Theta^k d^k(\lambda) + \sum_j \tilde{\Theta}^j \tilde{d}^j(\lambda) \quad (7)$$

avec

$$\Theta^k = \begin{bmatrix} \cos j\theta & & & & 0 \\ & \sin j\theta & & & \\ & & \cos j\theta & & \\ & & & \cos j\theta & \\ & 0 & & & \sin j\theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\tilde{\Theta}^j = \begin{bmatrix} \sin j\theta & & & & \\ & \cos j\theta & & & \\ & & \sin j\theta & & \\ & & & \sin j\theta & \\ & 0 & & & \cos j\theta \end{bmatrix}$$

En développant de même les efforts extérieurs en série de Fourier, on est conduit à résoudre autant de problèmes qu'il y a d'harmoniques (c'est-à-dire de valeurs de j) dans la décomposition, tous ces problèmes étant découplés entre eux. Cela suppose, évidemment que l'on puisse tronquer les séries de Fourier à un ordre raisonnable. De plus, les termes surmontés d'un \sim dans l'expression (7) conduisent formellement aux mêmes équations que les termes de la première somme de cette expression à un changement d'origine pris sur θ . On se contentera donc de formuler le problème pour l'un quelconque des d^j .

III.2 - Géométrie et interpolation de l'élément fini

Si on s'intéresse toujours à une couche, la formulation adoptée suppose que la surface moyenne de l'élément fini représentant cette couche est géométriquement la surface de révolution engendrée par un arc de cercle $i\bar{k}$ tournant autour d'un axe Ox , et délimitée par les cercles nodaux i et k . Entre ces deux cercles, le déplacement d^j est approximé par une interpolation polynomiale en fonction de l'abscisse curviligne réduite $s' = s/L$ (s : abscisse curviligne L : longueur de l'arc $i\bar{k}$).

Cette interpolation est exprimée par :

$$d^j(s') = N(s') \delta^j \quad (9)$$

Les déplacements tangentiels u^j et v^j sont interpolés linéairement, ainsi que les rotations φ^j et ψ^j . Le déplacement normal w^j est interpolé au moyen des polynômes d'Hermite du troisième degré :

$$w^j(s') = P_i w_i^j + P_k w_k^j + Q_i w_i^j + Q_k w_k^j \quad (10)$$

Dans cette expression, w_i^j et w_k^j sont les valeurs de $\frac{\partial w^j}{\partial s'} = w'^j$ aux cercles nodaux i et k . δ^j est la colonne des déplacements aux noeuds i et k :

$$\delta^j = \left\{ \begin{array}{l} u_i^j, v_i^j, w_i^j, w_i^j, \varphi_i^j, \psi_i^j; \\ u_k^j, v_k^j, w_k^j, w_k^j, \varphi_k^j, \psi_k^j \end{array} \right\} \quad (11)$$

Les déformations sont ensuite obtenues sous la forme $\mathcal{E}^j(\theta) \cdot \mathcal{E}^j(s')$, avec :

$$\mathcal{E}^j(s') = C^j(s') \delta^j \quad (12)$$

La matrice C^j obtenue à partir de (9) et (2) est donnée en annexe, et la matrice S^j s'écrit

$$S^j = \begin{bmatrix} \cos j\theta & 0 \\ 0 & \sin j\theta \end{bmatrix} \quad (13)$$

Le calcul de l'énergie de déformation donne ensuite la matrice de raideur de façon tout à fait classique. Son expression est la suivante :

$$K^j = \pi L \int_0^{2\pi} C^j H(\alpha) C^j r(\alpha) d\alpha \quad (14)$$

Pour $n = 0$, l'expression de K^0 donnée par (14) doit être multipliée par un facteur 2. En fait, ce même facteur se retrouve dans l'expression de la matrice de masse et du chargement généralisé. On peut donc l'omettre.

Dans la suite on supprimera l'indice j pour alléger l'écriture.

III.3 - Assemblage de plusieurs couches

L'assemblage consiste à imposer la continuité des déplacements aux interfaces entre les couches.

Supposons que la coque comporte n couches, chacune ayant une épaisseur h_p constante ($p = 1, 2, \dots, n$). On voit alors facilement que si la continuité des déplacements aux interfaces est réalisée aux extrémités i et k des éléments, alors elle est réalisée le long de l'interface tout entier.

Si on numérote les couches de 1 à n dans le sens croissant de la normale extérieure, l'assemblage entre la couche p et la couche $p + 1$ sera réalisé en imposant aux composantes de u_p et u_{p+1} les relations :

$$\begin{cases} u_{p+1} - \frac{h_{p+1}}{2} \varphi_{p+1} = u_p + \frac{h_p}{2} \varphi_p \\ v_{p+1} - \frac{h_{p+1}}{2} \psi_{p+1} = v_p + \frac{h_p}{2} \psi_p \\ w_{p+1} = w_p \\ w'_{p+1} = w'_p \end{cases} \quad (15)$$

En appliquant successivement cette opération aux n couches, on peut ainsi éliminer $4(n-1)$ inconnues. Si on choisit de conserver comme inconnues indépendantes les déplacements de la première couche et les rotations φ_p, ψ_p , de toutes les couches, la colonne δ_q des déplacements en un noeud (i ou k) de la couche n^o q s'exprime en fonction de ces inconnues par la relation :

$$\delta_q = A_q \delta \quad (16)$$

La transposée de δ étant donnée par :

$$\delta^T = \{ u_1, v_1, w_1, w'_1, \varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \dots, \varphi_n, \psi_n \} \quad (17)$$

Et la matrice A_q (matrice nodale d'extraction de la couche n^o q) s'écrit :

$$A_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & h_1 & 0 & \dots & \frac{h_q}{2} & 0 & 0 & \dots & \frac{h_n}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_1}{2} & 0 & h_1 & \dots & 0 & \frac{h_q}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{h_n}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (20)$$

Remarque - Il est possible d'appliquer ce type de méthode dans le cas où l'une des couches est en matériau sandwich, du moment que ce matériau comporte des semelles minces par rapport à l'âme. Dans ce cas, il faut apporter de légères modifications aux définitions de la matrice H et de la matrice A_q

La matrice de raideur d'un élément multicouche est obtenue finalement suivant la relation :

$$K_{el} = \sum_{q=1}^n A_q^T K_q A_q \quad (21)$$

où K_q est la matrice de raideur de la couche élémentaire n^o q et A_q est donnée par :

$$A_q = \begin{bmatrix} A_q & 0 \\ 0 & A_q \end{bmatrix} \quad (22)$$

(Matrice élémentaire d'extraction de la couche n^o q).

Remarque - La définition (20) de la matrice A_q s'applique au cas où la surface de référence choisie pour la représentation de l'élément multicouche assemblé est la surface moyenne de la première couche. Il est évident qu'on peut choisir comme surface de référence la surface moyenne de n importe laquelle des n couches, ou toute autre surface, matérielle ou non, en définissant la matrice A_q de façon appropriée.

III.4 - Matrice de masse

Comme la matrice de raideur, la matrice de masse d'un élément multicouche sera obtenue par "assemblage" des matrices de masse des différentes couches au moyen de (19), en remplaçant simplement les K_q par les matrices de masse M_q correspondantes. La matrice de masse relative à une couche s'écrit à partir de l'énergie cinétique :

$$E = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \xi \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \xi \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{\xi}{R_1} \right) \left(1 + \frac{\xi}{R_2} \right) r d\theta d\zeta \quad (23)$$

dans laquelle on retient les inerties de rotation, ce qui est cohérent avec l'abandon de la première hypothèse de Kirchhoff-Love (hypothèse a). La matrice de masse M pour une couche s'écrit :

$$M = \pi \rho L \int_0^1 N^T(\alpha) B(\alpha) N(\alpha) d\alpha \quad (22)$$

avec :

- ρ masse volumique du matériau dans la couche
- B matrice définie en annexe
- N matrice définie par (9) et explicitée en annexe.

Remarque - La matrice M ne dépend pas du numéro d'harmonique : elle est la même quel que soit j mis à part le cas $j = 0$, où intervient le même facteur 2 déjà rencontré pour la matrice de raideur.

III.5 - Chargement mécanique

Le cas le plus fréquemment rencontré est un chargement par pression interne ou externe à la coque. On obtient facilement l'expression discrétisée d'un tel chargement en calculant le travail virtuel des forces de pression dans le champ de déplacements donné par (9).

Cette opération ne fait pas intervenir le caractère multicouche des éléments et n'offre aucune difficulté. Nous ne la détaillerons donc pas.

IV - Chargement thermique

L'une des difficultés souvent rencontrées dans le calcul des contraintes thermiques en théorie des coques est la représentation correcte des gradients thermiques dans l'épaisseur de la coque, d'autant plus que les propriétés mécaniques des matériaux peuvent dépendre de la température.

Le modèle multicouche peut être avantageux dans de tels cas, car il permet, en représentant de façon simple (linéaire par exemple) la répartition de température dans chaque couche, d'approcher convenablement cette répartition. De plus, elle permet de tenir compte assez facilement des propriétés des matériaux en fonction de la température.

La prise en compte des effets thermiques s'opère par la méthode classique des "déformations initiales" appliquée d'abord à une couche. En utilisant ensuite l'opération d'assemblage des couches, on obtient l'expression d'un chargement mécanique équivalent discrétisé.

IV.1 - Déformations initiales pour une couche

On considère les déformations d'origine thermiques comme des déformations initiales rangées dans une colonne η de composantes (2) :

$$\eta_1(\rho, \theta) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \alpha_1 \tau(\rho, \theta) \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) d\zeta$$

$$\eta_2(\rho, \theta) = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \alpha_2 \tau(\rho, \theta) \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) d\zeta$$

$$\eta_3(\rho, \theta) = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \alpha_1 \tau \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \zeta d\zeta - \frac{3}{2hR_1} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \alpha_3 \tau(\rho, \theta) \left(1 - \left(\frac{2\zeta}{h}\right)^2\right) d\zeta$$

$$\eta_4(\rho, \theta) = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \alpha_2 \tau(\rho, \theta) \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \zeta d\zeta - \frac{3}{2hR_2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \alpha_3 \tau(\rho, \theta) \left(1 - \left(\frac{2\zeta}{h}\right)^2\right) d\zeta$$

$$\eta_5 = \eta_6 = \eta_7 = \eta_8 = \eta_9 = \eta_{10} = 0 \quad (23)$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$: coefficients de dilatation dans les directions ρ, θ, ζ . τ : accroissement de température par rapport à l'état initial. On néglige la contrainte normale occasionnée par la déformation thermique, mais on tient compte de l'effet des dilatations normales sur les variations de courbures. Cet effet peut être particulièrement notable pour des matériaux fortement anisotropes (composites à fibres par exemple) où α_3 peut être nettement supérieur à α_1 et α_2 , et surtout pour des coques à forte courbure.

Si on suppose maintenant que la variation de température est linéaire dans l'épaisseur de la couche considérée (figure 3) :

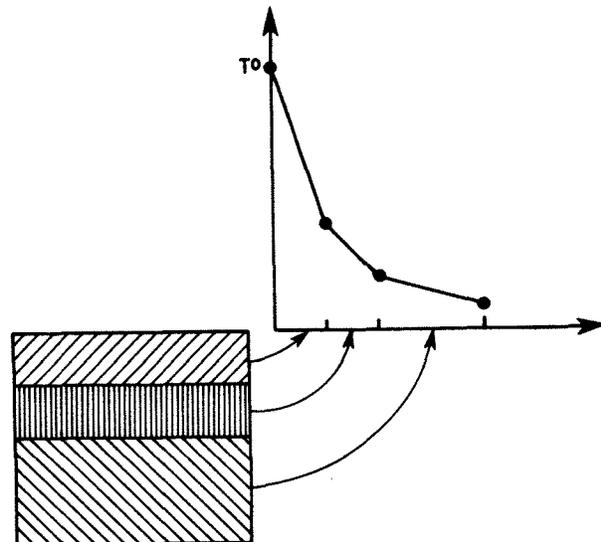


Fig. 3 - Variation de température dans l'épaisseur de la coque.

$$\tau(\rho, \theta, \zeta) = T_0(\rho, \theta) + \frac{\zeta}{h} \tau_1(\rho, \theta) \quad (24)$$

la colonne η est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \alpha_1 \left[\tau_0(s, \theta) + \frac{h}{\epsilon R_1} \tau_1(s, \theta) \right] \\ \eta_2 &= \alpha_2 \left[\tau_0(s, \theta) + \frac{h}{\epsilon R_2} \tau_1(s, \theta) \right] \\ \eta_3 &= \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{R_1} \tau_0(s, \theta) + \frac{2\alpha_1}{h} \tau_1(s, \theta) \\ \eta_4 &= \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{R_2} \tau_0(s, \theta) + \frac{2\alpha_2}{h} \tau_1(s, \theta) \\ \eta_p &= 0 \quad 5 \leq p \leq 10 \end{aligned} \quad (25)$$

On peut condenser ces relations sous forme matricielle en posant :

$$\eta = Yq \quad \text{avec } q = \begin{bmatrix} \tau_0(s, \theta) \\ \tau_1(s, \theta) \end{bmatrix} \quad (26)$$

En adoptant de plus une interpolation linéaire de la température en fonction de s' , il vient

$$q = Z(s') t(\theta) \quad (27)$$

avec :

$$Z(s') = \begin{bmatrix} (1-s') & s' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-s') & s' \end{bmatrix}$$

$$t(\theta) = \begin{bmatrix} \tau_{0,i} \\ \tau_{0,k} \\ \tau_{1,i} \\ \tau_{1,k} \end{bmatrix}$$

où la colonne $t(\theta)$ rassemble les valeurs de τ_0 et τ_1 aux noeuds i et k .

Enfin, il convient de développer $t(\theta)$ en série de Fourier.

$$t(\theta) = t^0 + \sum_{j=1}^{\infty} t^j \cos j\theta + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{t}^j \sin j\theta \quad (28)$$

Si on restreint le problème à la recherche des d^j (termes en $\cos j\theta$ dans le développement des déplacements), il suffit de retenir dans (28) les termes t^j , comme le montre le calcul de l'énergie de déformation.

A partir de (27) et (28), on obtient un développement de η en série de Cosinus dont le terme général s'écrit :

$$s^j(\theta) \eta^j = S^j(\theta) YZ t^j \quad (29)$$

avec

$$S^j(\theta) = \begin{bmatrix} \cos j\theta \\ \cos j\theta \end{bmatrix} \quad (30)$$

(diagonale 10×10)

IV.2 - Energie de déformation pour une couche

La loi de comportement s'écrit :

$$\Sigma = H(\epsilon - \eta) \quad (31)$$

et l'énergie de déformation :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{surface}} \epsilon^T H (\epsilon - \eta) ds \quad (32)$$

Cette expression peut encore s'écrire :

$$W = W_1 - W_2$$

$$\text{avec : } W_1 = \frac{1}{2} \int \epsilon^T H \epsilon ds \quad (33)$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \int \epsilon^T H \eta ds$$

Le terme W_1 conduit au calcul de la matrice de rigidité, tandis que le terme W_2 peut s'interpréter comme le travail virtuel d'un chargement équivalent au chargement thermique.

En effet, ce terme s'écrit, compte tenu de la discrétisation :

$$W_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \delta^{jT} \left\{ \int_{\text{surface}} c^{jT} s^j H s^j YZ ds \right\} t^j \quad (34)$$

et sa composante pour un harmonique j quelconque s'écrit

$$W_2^j = \delta^{jT} \left\{ \frac{\pi L}{2} \int_0^1 c^{jT} H YZ \epsilon ds \right\} t^j \quad (35)$$

(sauf pour $j=0$ où intervient un facteur 2 comme dans les matrices K et M).

On voit donc apparaître les forces nodales généralisées équivalentes sous la forme :

$$F^j = \left[\frac{\pi L}{2} \int_0^1 c^{jT} H YZ \epsilon ds \right] t^j \quad (36)$$

Le chargement équivalent relatif à chacune des couches étant calculé au moyen de (36), il convient ensuite de calculer le chargement global appliqué à l'élément multicouche en faisant la somme des énergies W_2^j de ces couches ($j = 1, 2, \dots, n$) et en appliquant l'opération "d'assemblage" déjà décrite aux δ_j . On obtient ainsi :

$$G^j = \sum_{q=1}^n A_q^T F_q^j \quad (37)$$

Pour chaque valeur de j retenue, les colonnes G^j obtenues sont ensuite assemblées suivant le processus habituel pour obtenir le chargement relatif à la structure entière.

V - Applications

La méthode exposée a été appliquée à de nombreux cas de calculs, tant statiques que dynamiques, au moyen de plusieurs programmes dans lesquels l'élément fini multicouche a été introduit : REXBAT MULTICOUCHE (3) pour les calculs de modes propres de structures multicouches axisymétriques REXBAT LIQUIDE (8) pour les calculs des modes propres de structures axisymétriques, multicouches ou non, couplées à des fluides, CONRAD pour le calcul de structures axisymétriques multicouches en chargement statique, mécanique ou thermique.

Le programme REXBAT MULTICOUCHE peut aussi être couplé aux programmes de réponse transitoire (méthode modale) et TRANSIT (méthode pas à pas).

Nous présentons quelques exemples d'application parmi les plus représentatifs.

V.1 - Cylindre encastré soumis à un chargement statique

Cette application très simple permet de voir la grande importance de l'effet du cisaillement transverse au voisinage des extrémités.

Le cylindre est composé de deux couches dont la plus interne est elle-même une couche sandwich et la plus externe une couche homogène d'épaisseur comparable, mais plus rigide en cisaillement transverse. Le chargement, illustré par la figure 4, est composé d'un effort axial F et d'une pression interne p . tous déplacements et rotations sont bloqués aux extrémités, sauf le déplacement axial sur la section d'application de la force F . La discrétisation comporte 60 éléments à 2 couches resserrés aux extrémités. Les déplacements (axisymétriques) longitudinaux (u) et transversaux (w) sont présentés (fig. 5) et comparés avec des résultats de calcul utilisant des rigidités "équivalentes". On peut constater (fig. 6) que les rotations sont bien plus importantes dans la couche externe que dans la couche sandwich où le glissement transverse de l'âme joue un grand rôle. De même sur la figure 7 on peut voir que l'effort tranchant est transmis principalement par la couche externe.

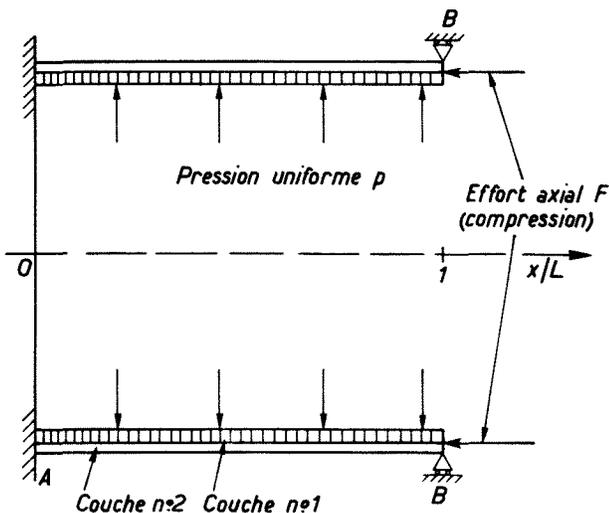


Fig. 4 - Cylindre à deux couches : conditions aux limites et chargement statique.

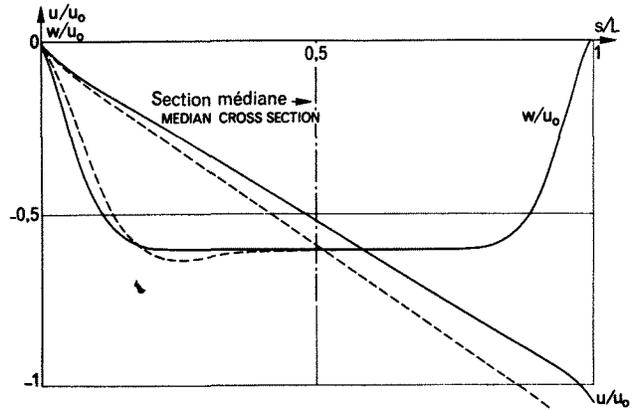


Fig. 5 - Cylindre à deux couches en chargement statique. Déplacements : u axial, w radial.

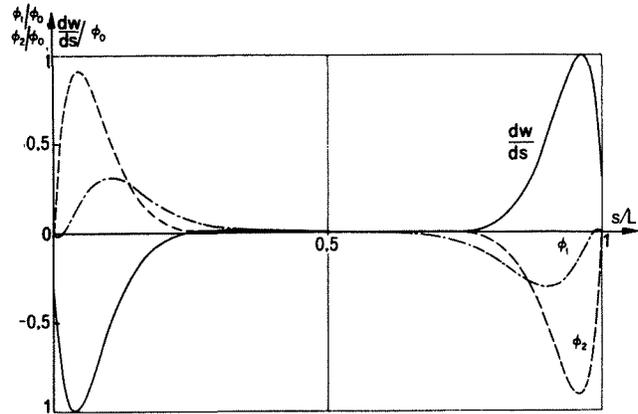


Fig. 6 - Cylindre à deux couches en chargement statique. Rotations ϕ_1 et ϕ_2 pente $\frac{dw}{ds}$.

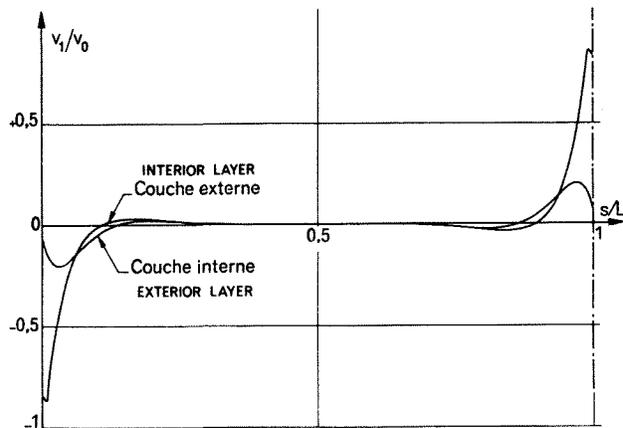


Fig. 7 - Cylindre à deux couches en chargement statique. Efforts tranchants.

V.2 - Cylindre composite renforcé par des cadres aux extrémités : modes propres de la structure libre

Il s'agit d'une structure analogue à la première, mais comportant des cadres métalliques aux extrémités. Ces cadres sont fixés par des systèmes complexes d'introduction des efforts, pouvant comporter jusqu'à cinq couches de matériaux distincts. La discrétisation comporte environ 60 éléments ayant, suivant les zones, de 1 à 5 couches. La structure est complètement libre. Les modes propres sont calculés pour des nombres d'ondes circonférentielles n variant de 2 à 5, et des nombres d'ondes longitudinales variant de 0 à 4. Les figures 8 à 12 présentent la comparaison des fréquences calculées aux fréquences mesurées. Au cours de cette étude, on a pu constater le rôle très important joué par les liaisons au voisinage des cadres. Les légères différences entre fréquences mesurées et fréquences calculées sont probablement imputables à la mauvaise connaissance des matériaux constituant ces zones de liaison.

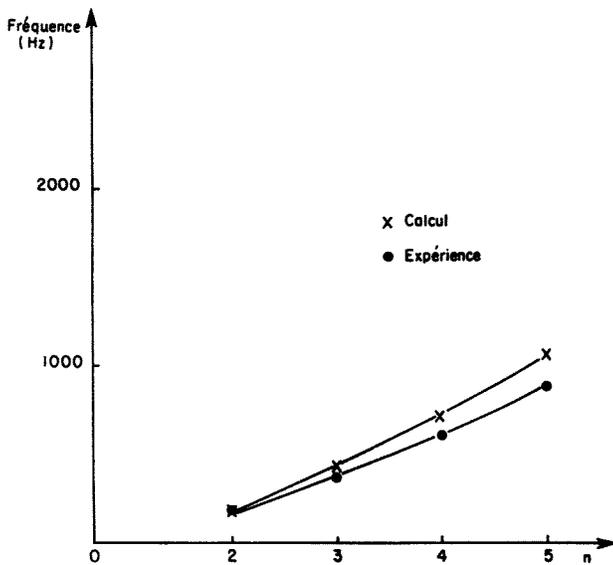


Fig. 8 - Cylindre avec cadres. Fréquences propres $m = 0$.

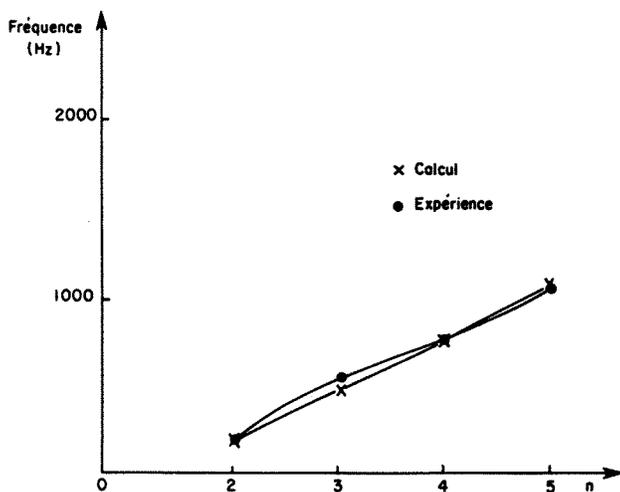


Fig. 9 - Cylindre avec cadres. Fréquences propres $m = 1$.

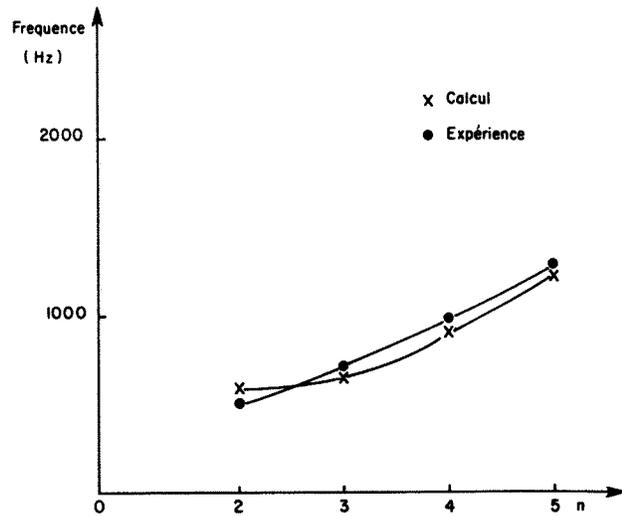


Fig. 10 - Cylindre avec cadres. Fréquences propres $m = 2$.

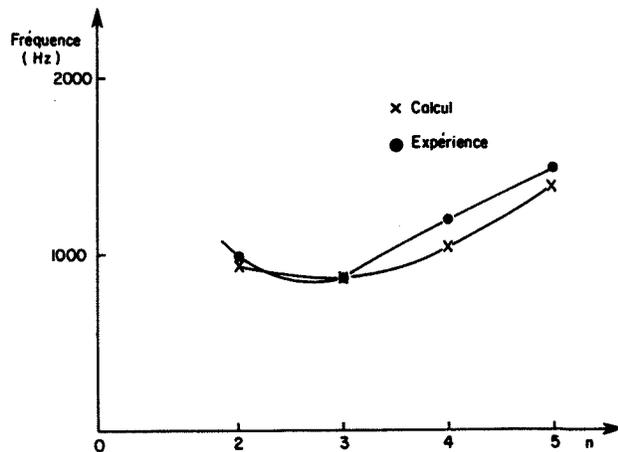


Fig. 11 - Cylindre avec cadres. Fréquences propres $m = 3$.

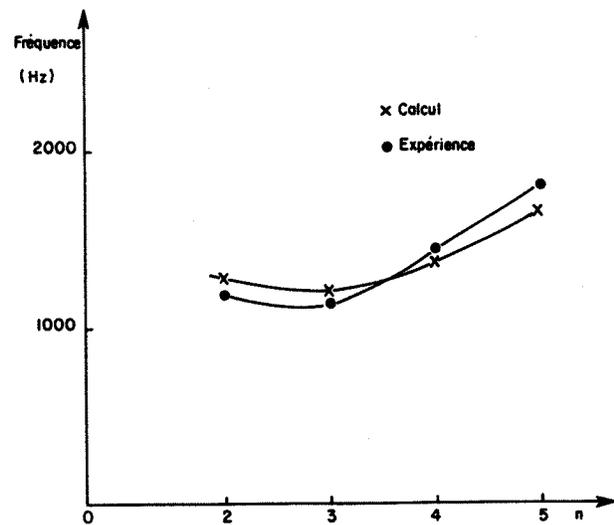


Fig. 12 - Cylindre avec cadres. Fréquences propres $m = 4$.

V.3 - Vibrations hydroélastiques d'un réservoir multi-couche rempli de liquide

Le troisième exemple est le calcul d'un réservoir composé de trois couches de matériaux très différents (aluminium, klegecell, liège) et rempli de liquide. La méthode de calcul des vibrations couplées structure-fluide a été développée à l'ONERA (6) à (8). Les résultats présentés par les figures 13 et 14 nous ont été aimablement communiqués par les auteurs. Les fréquences propres présentées correspondent à des nombres d'ondes circonférentielles n variant de 2 à 4, et aux deux premiers modes pour chacune de ces valeurs. L'accord est tout à fait satisfaisant entre le calcul et l'expérience.

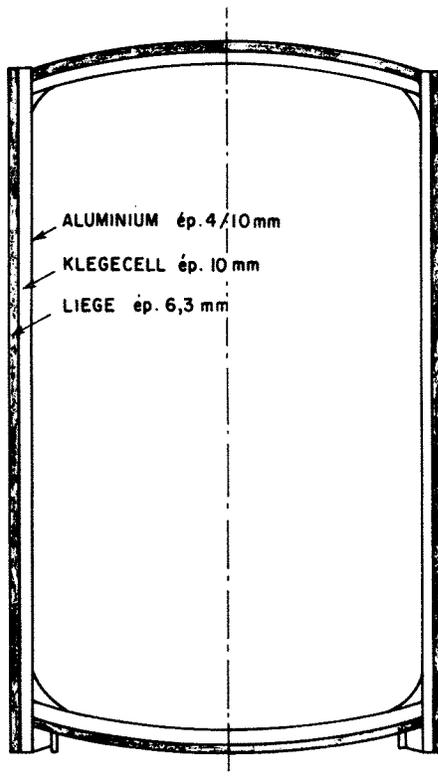


Fig. 13 - Réservoir multicouche rempli de liquide : structure.

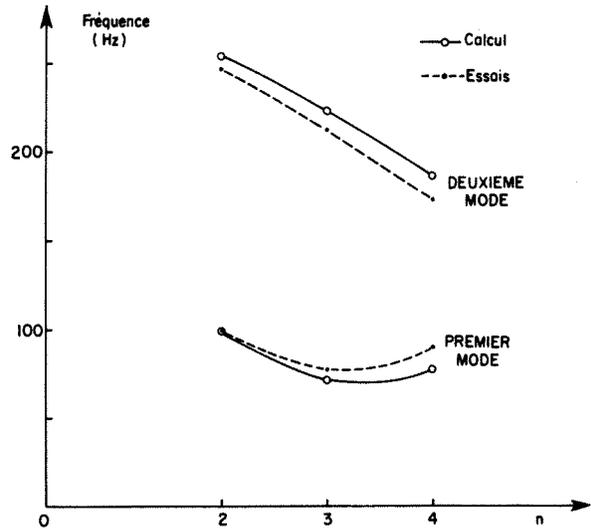


Fig. 14 - Réservoir multicouche rempli de liquide : fréquences propres. Comparaison calcul-expérience.

V.4 - Contraintes thermiques dans une ogive homogène

Il s'agit cette fois d'un calcul sur une structure homogène en présence d'un champ de température variant fortement dans l'épaisseur de la coque (fig. 15). Le chargement thermique et les déplacements sont axisymétriques. La coque est découpée en une vingtaine d'éléments comportant trois couches dont l'épaisseur est choisie de façon à représenter au mieux la courbe de température par trois segments de droites. L'ogive est encastree à sa base. Les figures 16 et 17 montrent la variation des contraintes aux interfaces et sur les faces interne et externe (σ_θ : contrainte circonférentielle, σ_A : contrainte longitudinale) calculées à partir des contraintes généralisées N_1, N_2, M_1, M_2 , en supposant une variation linéaire dans l'épaisseur.

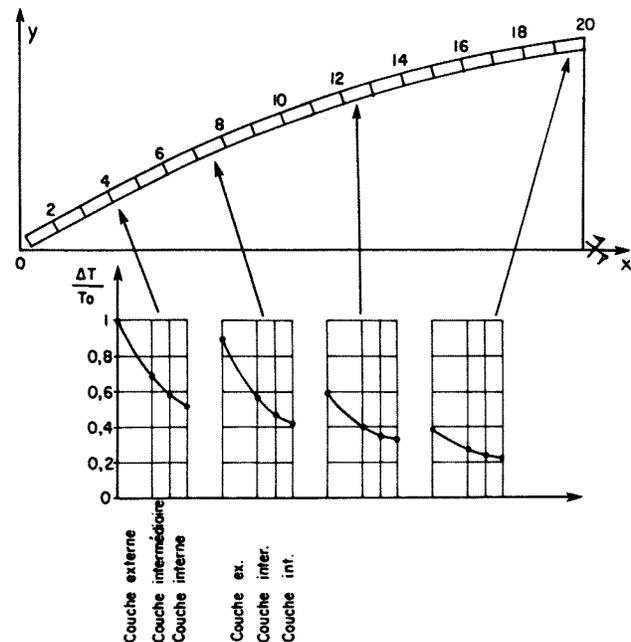


Fig. 15 - Ogive en chargement thermique : répartition de température dans l'épaisseur. Discrétisation.

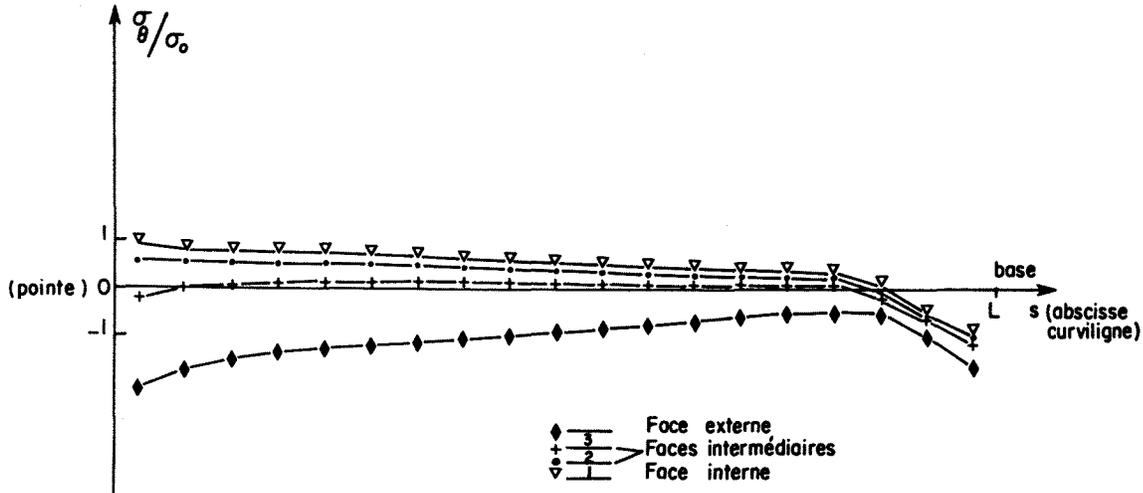


Fig. 16 - Ogive en chargement thermique. Contraintes circonférentielles σ_{θ} .

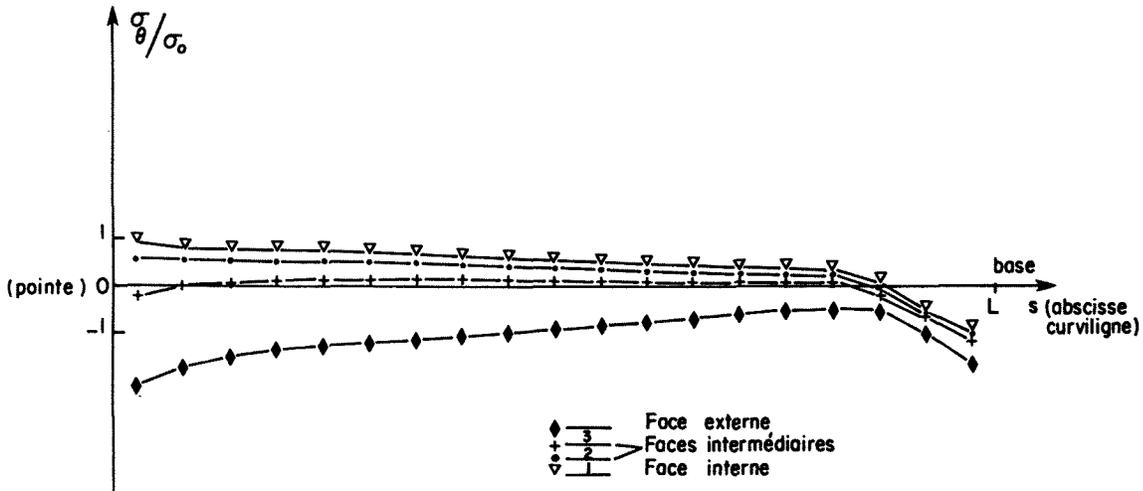


Fig. 17 - Ogive en chargement thermique : contraintes longitudinales σ_s .

VI - Conclusion

La méthode qui vient d'être décrite s'est montrée efficace et précieuse dans de nombreux types de problèmes. Elle a aussi été appliquée avec succès à des problèmes de réponse transitoire dont les résultats ne sont pas présentés ici, dans des cas de chargements impulsifs très rapides où les phénomènes propagatoires jouent un grand rôle.

Il faut néanmoins souligner ses limitations : d'une part elle ne permet pas de traiter des coques vraiment épaisses - mais ce problème est plutôt du ressort des méthodes tridimensionnelles - et d'autre part elle devient coûteuse pour des matériaux comportant de nombreuses couches, et dans certains cas (chargement statique en particulier) inutilement raffinée pour ce type de matériaux dont il est difficile de connaître les caractéristiques exactes de chacune des couches séparément.

Cependant dans le cadre des études du type mentionné ici, la méthode s'est révélée très satisfaisante et

très souple d'emploi, notamment pour des coques comprenant deux ou trois couches relativement épaisses.

L'un de ses aspects les plus attrayants est de permettre la représentation rigoureuse d'un comportement relativement complexe de coque multicouche au moyen d'un seul et même élément de base sans pour cela être obligé d'introduire une formulation tridimensionnelle qui, à précision égale, serait nettement plus coûteuse.

VII - Remerciements

L'auteur tient à préciser que les résultats présentés ici ont été obtenus grâce au travail de toute une équipe, et en particulier de MM. J. Bordas et D. Louis de l'ONERA qui ont été les principaux artisans de la mise en œuvre numérique de la méthode exposée. Il tient aussi à remercier MM. R. Ohayon, H. Berger, P. Paquignon de l'ONERA pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à cette méthode et les résultats qu'ils lui ont aimablement communiqués.

Références

- (1) P.M. Naghdi - On the theory of thin elastic shells. Quarterly of Applied Mathematics. Vol. XIV n° 4 (janv. 1957).
- (2) P.M. Naghdi - On thermoelastic stress-strain relations for thin isotropic shells. J^{al} Aero-Sciences (fév. 1959).
- (3) D. Engrand - J. Bordas - Calcul des coques en matériaux multicouches et sandwichs par la méthode des éléments finis. La recherche Aérospatiale n° 2 1973 (mars-avril).
- (4) D. Engrand - J. Bordas - Analysis of axisymmetrical shells in multilayer and sandwich materials using the finite element method. Material and Building Research n° 34 - Annales de l'ITBTP n° 330 (supplément).
- (5) W.A. Loden - L.E. Stearns - User's manual for the REXBAT program. Lockheed missiles and space company inc - Sunny vale Calif.
- (6) H. Berger - J. Boujot - R. Ohayon - On spectral problems in vibration mechanics. Computation of elastic tanks partially filled with liquids. JMAA Vol. 51 (august 1975) p. 272-298.
- (7) P. Paquignon - Structures hydroélastiques multicouches. Comparaison de deux méthodes de calcul par éléments finis. Communication personnelle.
- (8) H. Berger - R. Ohayon - Manuel d'utilisation du programme de calcul de vibrations hydroélastique de corps de révolution REXBAT-LIQUIDE. (à paraître)

Annexe

Définition de la matrice H (formule (5)).

$$C_1 = \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_1}$$

$$C_2 = \frac{E_2 h}{1 - \nu_2 \nu_2}$$

$$C_{12} = C_1 \nu_{12} = C_2 \nu_{21}$$

$$D_1 = \frac{h^2}{12} C_1$$

$$D_2 = \frac{h^2}{12} C_2$$

$$D_{12} = D_1 \nu_{12} = D_2 \nu_{21}$$

$$\Delta_1 = -D_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\Delta_2 = -D_2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$F_1 = \frac{\Sigma}{6} h G_{13}$$

$$F_2 = \frac{\Sigma}{6} h G_{23}$$

$$I_{12} = h G_{12}$$

$$J_1 = J_2 = J_{12} = I_{12} \frac{h^2}{12}$$

$$\Gamma_1 = -J_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\Gamma_2 = -\Gamma_1$$

$$\bar{I}_1 = I_{12} - \frac{\Gamma_1}{R_1}$$

$$\bar{I}_2 = I_{12} - \frac{\Gamma_2}{R_2}$$

avec :

E_1 : Module d'Young dans la direction \mathcal{A}

E_2 : Module d'Young dans la direction θ

ν_1, ν_2 : Coefficients de Poisson ($E_2 \nu_2 = E_1 \nu_{12}$)

h : Epaisseur de la couche

G_{12} : Module de cisaillement dans le plan tangent

G_{13} : Module de cisaillement transverse plan (\mathcal{A}, ζ)

G_{23} : Module de cisaillement transverse plan (θ, ζ)

Matrice N (formule (9))

$$N = (N_i, N_k)$$

avec :

$$N_i = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_i & Q_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P \end{bmatrix} \quad N_k = \begin{bmatrix} s' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s' \end{bmatrix}$$

avec $s' = s/L$, $P = (1-s')$

P_i, P_k, Q_i, Q_k : polynômes

d'hermite du troisième degré

$$P_i = 1 - 3s'^2 + 2s'^3$$

$$P_k = 3s'^2 - 2s'^3$$

$$Q_i = L (s' - 2s'^2 + s'^3)$$

$$Q_k = L (-s'^2 + s'^3)$$

Matrice C^j (formule (12))

$$\begin{array}{c|c}
 \begin{array}{cccccc}
 -\frac{1}{L} & 0 & \frac{P_i}{R_1} & \frac{Q_i}{R_1} & 0 & 0 \\
 PT & j\frac{P}{r} & \frac{P_i}{R_2} & \frac{Q_i}{R_2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & PT & j\frac{P}{r} \\
 -\frac{P}{R_1} & 0 & P'_i & Q'_i & P & 0
 \end{array} &
 \begin{array}{cccccc}
 \frac{1}{L} & 0 & \frac{P_k}{R_1} & \frac{Q_k}{R_1} & 0 & 0 \\
 s'T & j\frac{s'}{r} & \frac{P_k}{R_2} & \frac{Q_k}{R_2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & s'T & j\frac{s'}{r} \\
 -\frac{s'}{R_1} & 0 & P'_k & Q'_k & s' & 0
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cccccc}
 0 & -\frac{P}{R_2} & -j\frac{P_i}{r} & -j\frac{Q_i}{r} & 0 & P \\
 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -j\frac{P}{r} & -PT & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -j\frac{P}{r} & -PT
 \end{array} &
 \begin{array}{cccccc}
 0 & -\frac{s'}{R_2} & -j\frac{P_k}{r} & -j\frac{Q_k}{r} & 0 & s' \\
 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -j\frac{s'}{r} & -s'T & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -j\frac{s'}{r} & -s'T
 \end{array}
 \end{array}$$

avec: P, P_i, P_k, Q_i, Q_k déjà définis

$$T = \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} = -\frac{\sin\alpha}{r}$$

$$\begin{aligned}
 P'_i &= \frac{dP_i}{ds} & Q'_i &= \frac{dQ_i}{ds} \\
 P'_k &= \frac{dP_k}{ds} & Q'_k &= \frac{dQ_k}{ds}
 \end{aligned}$$

Matrice B (formule (22))

$$B = \begin{bmatrix}
 m & 0 & 0 & \nu & 0 \\
 0 & m & 0 & 0 & \nu \\
 0 & 0 & m & 0 & 0 \\
 \nu & 0 & 0 & \mu & 0 \\
 0 & \nu & 0 & 0 & \mu
 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec: } m = h \left(1 + \frac{h^2}{12 R_1 R_2} \right)$$

$$\mu = \frac{h^3}{12} \left(1 + \frac{3h^2}{20 R_1 R_2} \right)$$

$$\nu = \frac{h^3}{12} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$